

УДК 532.517.2:534.2

**ДВУХСЛОЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ РАСПЛАВОВ ПОЛИМЕРОВ  
В КАНАЛАХ ФИЛЬЕР***Б. А. Снигерев***Аннотация**

Работа посвящена численному моделированию двухслойных течений нелинейно-вязких жидкостей в каналах фильер. Движение жидкостей описывается уравнениями сохранения массы и импульса, дополненные реологическим уравнением состояния нелинейно-вязкой жидкости по модели Карро. Приводится методика численного решения задачи на основе метода конечных элементов. Исследована картина распределения скоростей жидкости, давления, напряжений, положения границы раздела в двухслойном потоке в зависимости от реологических свойств жидкости и режимов течения.

**Ключевые слова:** (нелинейно-вязкая жидкость, граница раздела, двухслойное течение)

**1. Введение**

Слоистые или стратифицированные течения жидкостей давно привлекают внимание исследователей. Очень актуальными являются исследования, связанные с проблемами транспортировки сырой нефти по трубопроводам. Известны способы снижения давления, необходимого для перекачки нефти по трубам, путем добавления к нефти полимерного раствора, который оттесняясь к стенкам трубы, формирует двухслойный поток. В ряде работ проведены теоретические исследования с целью анализа причин неустойчивости сдвигового течения двухслойных систем, состоящих из упругих вязких жидкостей, когда в качестве реологических уравнений состояния используются уравнения неньютоновских жидкостей [1,2]. Неустойчивость слоистого течения выражается через колебания координаты поверхности раздела относительно оси потока. Показано, что нестабильная форма поверхности раздела характерна для течений, у которых существенно различны вязкости и нормальные напряжения компонентов потока на линии их контакта. Но наиболее активно стимулировали развитие стратифицированных течений проблемы, возникающие при производстве слоистых полимерных пленок и биокomпонентных волокон методом соэкструзии, когда два или более потоков расплава продавливаются через формующую головку совместно [3-5]. Надо заметить, что предложенные математические модели не касаются исследования течения на этапе формирования потока, то есть области течения на начальном участке канала, где происходит образование совместного течения двух разнородных жидкостей.

В настоящей работе исследуются установившиеся несмешивающиеся двухслойные течения неньютоновских жидкостей, образующиеся в результате слияния двух потоков в плоском канале с образованием границы раздела течения.

**2. Постановка задачи**

Рассматривается безволновое неизотермическое течение двух несмешивающихся жидкостей в сходящемся канале, схема которого показана на рис.1. Первая жидкость с объемным расходом  $Q^1$  подается на входе  $\Gamma_1^1$  (И), вторая на входе  $\Gamma_1^2$

(AB) с расходом  $Q^2$ , после схождения потоков в сечении EOL образуется совместное течение жидкостей с границей разделения потоков  $\Gamma_6$  (OG). Область течения жидкости в нижнем слое ИНОГМ обозначается как  $\Omega_1$ , а в верхнем ВАЕFGO соответственно  $\Omega_2$ . Течение неньютоновских жидкостей в каждой из областей  $\Omega_{1,2}$  описывается уравнениями сохранения количества движения и неразрывности в виде

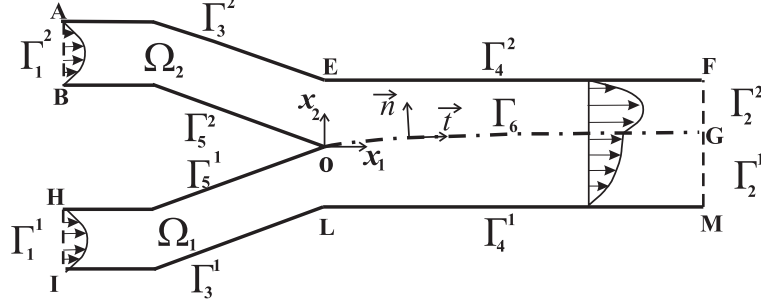


Рис. 1. Схема расчетной области двухслойного потока жидкости

$$\varrho^m \left( \frac{\partial u_i^m}{\partial t} + u_j^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}^m}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i^m}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad m = 1, 2 \quad (2)$$

Система уравнений (1) - (2) замыкается реологическим уравнением состояния нелинейно-вязкой жидкости в форме степенного закона [4]

$$\sigma_{ij}^m = -p^m \delta_{ij} + \tau_{ij}^m, \quad (3)$$

$$\tau_{ij}^m = \eta^m(I_2) D_{ij}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\eta^m(I_2) = \mu_0(I_2)^{\frac{k-1}{2}}$$

В (1) - (3)  $x_i$  - декартовы координаты,  $u_i^m$  - компоненты скорости для жидкости с индексом  $m$ ,  $p^m$  - давление,  $\varrho^m$  - плотность,  $\sigma_{ij}^m$  - компоненты полного тензора напряжений,  $\tau_{ij}^m$  - компоненты тензора девиатора напряжений,  $D_{ij}$  - компоненты тензора скоростей деформаций,  $\delta_{ij}$  - компоненты единичного тензора,  $I_2$  - второй инвариант тензора скоростей деформаций,  $\eta^m(I_2)$  - эффективная вязкость жидкости,  $\mu_0$  - показатель консистенции жидкости (приведенная вязкость),  $k$  - параметр модели.

В начальный момент времени граница раздела слоёв  $\Gamma_6$  имеет плоскую горизонтальную форму. На входных участках  $\Gamma_1^m$  задается профиль осевой скорости, характерный для установившегося течения неньютоновской жидкости в плоском канале. На твердых стенках  $\Gamma_{3,4,5}^m$  выполняются условия прилипания, а на выходных границах  $\Gamma_2^m$  ставятся условия установившегося потока. На подвижной границе раздела слоев жидкости  $\Gamma_6$  должно выполняться кинематическое условие. Кроме того должны выполняться динамические условия, выражающиеся в равенстве касательных напряжений жидкости с каждой стороны границы раздела, а нормальные напряжения имеют разрыв [4].

Таким образом, граничные условия запишутся в виде :

$$\begin{aligned} \Gamma_1^m : u_1^m &= U_0^m(x_2), u_2^m = 0, p^m = p_0^m; \\ \Gamma_2^m : \partial u_1^m / \partial x_1 &= 0; \\ \Gamma_3^m, \Gamma_4^m, \Gamma_5^m : u_1^m &= u_2^m = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_6 : u_i^m \cdot n_i &= 0, u_i^1 \cdot t_i = u_i^2 \cdot t_i, \\ \sigma_{ij}^1 \cdot t_j &= \sigma_{ij}^2 \cdot t_j, \sigma_{ij}^1 \cdot n_j - \sigma_{ij}^2 \cdot n_j = 2\gamma H n_j \end{aligned}$$

Здесь  $n_i, t_j$  – компоненты единичной нормали и касательной к поверхности  $\Gamma_6$ , условия на  $\Gamma_6$  записаны в локальной декартовой системе координат, связанной с каждой точкой свободной поверхности,  $\gamma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $H$  – главная кривизна поверхности раздела.

В двумерном случае поверхность раздела описывается уравнением  $F(x_1, x_2, t) = 0$ , тогда выполняется следующее условие [3]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_i^m \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

### 3. Численное решение задачи

Для решения уравнений (1) – (3) с граничными условиями (4) используется метод конечных элементов [6]. На каждом шаге по времени расчет проводится в два этапа, когда решаются исходные уравнения в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно. Для получения матричных уравнений применяется стандартная процедура Галёркина [6]. В качестве конечных элементов используются четырехугольные элементы с квадратичной интерполяцией для переменных компонент скорости  $u_i$ , линейной для давления  $p$ , компонент девизатора тензора напряжений  $\tau_{ij}$ . Для аппроксимации деформируемых границ применяется конечно-элементная методика, базирующаяся на Эйлеровом подходе и заключающаяся в локальной перестройке конечно-элементной сетки вблизи движущихся границ. Для реализации граничных условий на подвижной границе раздела  $\Gamma_6^n$  на  $n$  шаге по времени, определенной с помощью конечно-элементной аппроксимации, применяется линеаризованная итерационная процедура, когда граничные условия (4) заменяются на следующие для области расчета  $\Omega_1^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} u_i^1 \cdot t_i |^{n+1} &= u_i^2 \cdot t_i |^n, \quad u_i^1 \cdot n_i |^{n+1} = 0, \\ \sigma_{ij}^1 \cdot n_j |^{n+1} &= \sigma_{ij}^2 \cdot n_j |^n + 2\gamma H n_j, \\ \sigma_{ij}^1 \cdot t_j |^{n+1} &= \sigma_{ij}^2 \cdot t_j |^n \end{aligned} \quad (6)$$

Значения переменных на  $n$  итерации в правой части записанных соотношений вычисляются на совместной границе по значениям из области  $\Omega_2^n$ . Затем решается аналогичная задача для области  $\Omega_2^{n+1}$  с граничными условиями на  $\Gamma_6^n$ , в которых правые части соотношений (6) вычисляются по решению задачи (1) – (4) на  $n$  итерации для области  $\Omega_1^{n+1}$ . После первого этапа определяется поле скоростей, давлений для обеих областей на  $n+1$  итерации. Затем с помощью численной аппроксимации кинематического условия (5), определяется положение границы раздела  $F^{n+1}$  на  $n+1$  итерации. Далее возможен переход к первому этапу с известным новым положением границы и решением задачи на предыдущей итерации для всей

области течения. Итерации продолжаются до выполнения сходимости решения, которое заключается в определении установившегося положения границы, определяющегося как  $|\frac{F^{n+1}-F^n}{F^n}| \leq \epsilon_1$ , удовлетворении граничных условий для скорости и напряжений на подвижной границе раздела  $\Gamma_6$ :  $|u_i^1 \cdot t_i|^{n+1} - |u_i^2 \cdot t_i|^n \leq \epsilon_2$ ,  $|\sigma_{ij}^1 \cdot t_j|^{n+1} - |\sigma_{ij}^1 \cdot t_j|^n \leq \epsilon_2$ , где  $\epsilon_1 = 10^{-3}$ ,  $\epsilon_2 = 10^{-4}$ .

#### 4. Результаты численных расчетов

Рассмотрим двухслойное течение неньютоновских жидкостей в канале с шириной в области совместного течения  $h = 2 \cdot 10^{-3}$  м при расходах  $Q^1 = 5 \cdot 10^{-9}$  м<sup>3</sup>/с,  $Q^2 = 20 \cdot 10^{-9}$  м<sup>3</sup>/с. Значения физических констант для компонентов потока следующие:  $\varrho^1 = 930$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_0^1 = 10010$  Па·с,  $k^1 = 0.75$ ,  $\varrho^2 = 980$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_0^2 = 10020$  Па·с,  $k^2 = 0.75$ .

В случае двухслойного течения положение границы раздела определяется величинами расходов и их отношением, а также отношением величин вязкостей расплавов потоков [4]. Обозначим через  $l_1, l_2$  - ширины потоков для нижнего и верхнего слоя соответственно ( $l_1 + l_2 = h$ ). Введем безразмерную величину  $h_f = l_2/(h/2)$ , показывающую степень изменения ширины потока при совместном течении в канале. Влияние расходов на положение границы раздела сред показано на рис. 2, где приведено распределение  $h_f$  для отношений расходов  $Q^1/Q^2$ : 1 -  $Q^1/Q^2 = 5$ , 2 - 10, 3 - 20. Значения  $h_f$  для установившегося потока составляют  $h_f = 1.29, 1.73, 1.96$ . Для определения влияния различия вязкости на положение границы раздела рассчитывались течения в условиях постоянства расходов в нижнем и верхнем слое  $Q^1 = Q^2$ . Влияние вязкости определялось в условиях, когда вязкость нижнем слое остается равной  $\mu_0^1 = 10010$  Па·с,  $k^1 = 0.75$ , а верхнем слое коэффициент  $\mu_0^1$  увеличивается, при этом отношение  $\mu_0^2/\mu_0^1$  равно  $\mu_0^2/\mu_0^1 = 5, 10, 20$ . Поскольку вязкость нижнего слоя жидкости в области совместного течения выше чем в верхнем, то это приводит к смещению положения границы раздела от оси канала к верхней стенке. Дальнейшее увеличение  $\mu_0^2/\mu_0^1$  приводит к росту отклонения, что иллюстрирует рис. 3. На этом рисунке показано распределение  $h_f$  для трех вязкостных режимов: 1-  $\mu_0^2/\mu_0^1 = 5$ , 2- 10, 3- 20.

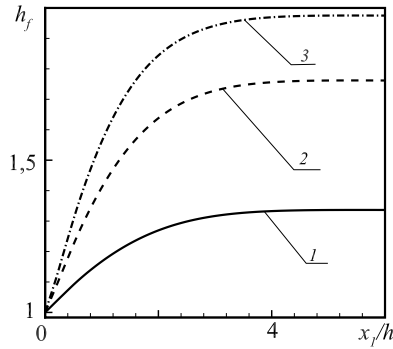


Рис. 2. Профили границы раздела жидкостей при различных  $Q^1/Q^2$ :  
1 -  $Q^1/Q^2 = 5$ , 2 - 10, 3 - 20

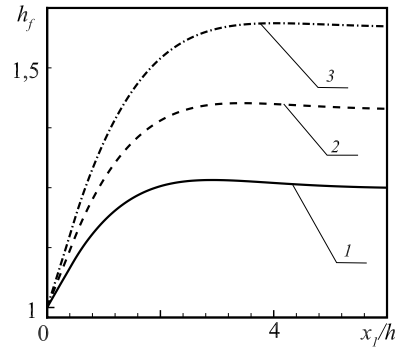


Рис. 3. Профили границы раздела жидкостей при различных  $\mu_0^1/\mu_0^2$ :  
1 -  $\mu_0^1/\mu_0^2 = 5$ , 2- 10, 3- 20

На рис. 4 показаны установившиеся профили скорости  $u_1/U_0$  двухслойного течения в сечении  $x_1/h = 3.0$  при отношении расходов  $Q^1/Q^2 = 4$  в зависимости от параметра  $k$ . В рассматриваемом течении псевдопластичные свойства жидкости в

верхнем слое не изменяются, а изменяются в нижнем слое, определяемые параметром  $k$ . На рис. 4 приведены профили скорости для течения в случае  $Q^1/Q^2 = 4$ ,  $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$ ,  $k^1 = 0.9$ ,  $k^2 = 0.1, 0.3, 0.7, 0.9$ . Усиление псевдопластичных свойств (уменьшение показателя  $k^1$ ) для нижнего слоя, приводит к уменьшению эффективной вязкости в этой области течения  $\Omega^1$ , особенно в областях больших значений градиента скорости. При течении жидкостей с разными расходами, но с одинаковыми псевдопластичными свойствами, в сечении на достаточно удаленном от точки схода потоков, образуется параболический профиль скорости, характерный для однородного потока (рис. 4, кривая -4). Усиление же псевдопластичных свойств, приводит к тому, что профиль скорости становится немонотонным, с образованием зоны изгиба на границе раздела слоев. Динамика развития установившегося профиля скорости для случая  $Q^1/Q^2 = 4$ ,  $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$ ,  $k^2 = 0.9$ ,  $k^1 = 0.3$  показана на рис. 5, где приведены профили скорости в сечениях  $x_1/h = 0.0, 0.1, 0.5, 3.0$ . В начальном сечении  $x_1/h = 0.0$  сходятся два неньютоновских потока с монотонными профилями скоростей. Из графиков видно, что в области схождения потоков

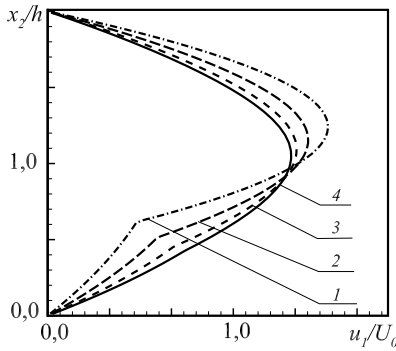


Рис. 4. Распределение скорости  $u_1/U_0$  в сечении канала  $x = 3.0$  для  $Q^1/Q^2 = 5$ ,  $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$ ,  $k^1 = 0.9$  при различных значениях  $k^2$ : 1 —  $k^2 = 0.1$ , 2 —  $0.3$ , 3 —  $0.7$ , 4 —  $0.9$

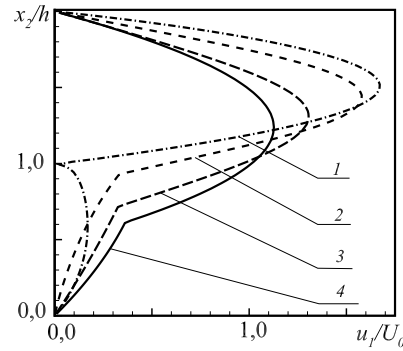


Рис. 5. Распределение скорости  $u_1/U_0$  при  $Q^1/Q^2 = 5$ ,  $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$ ,  $k^1 = 0.1$ ,  $k^2 = 0.9$  в вертикальных сечениях канала при различных  $x_1'$ : 1 —  $x_1' = 1.0$ , 2 —  $1.1$ , 3 —  $1.5$ , 4 —  $3.0$

начинается смещение границы раздела в область течения нижнего слоя, где течет жидкость с более псевдопластичными свойствами, характеризующимися меньшими значениями эффективной вязкости. Смещение границы в сторону нижней стенки приводит к расширению ширины потока верхнего слоя, что в свою очередь, приводит к тому, что максимальные значения скорости уменьшаются, по мере удаления от точки схода потоков (рис. 5, кривые - 2, 3, 4). Уменьшение максимального значения скорости сопровождается смещением данной зоны к нижней стенке, а в нижнем слое уменьшение ширины потока приводит к увеличению средней скорости потока. Отметим также, что двухслойное течение неньютоновских жидкостей с большим отличием псевдопластичных свойств характеризуется тем, что расстояние на котором происходит установление стационарного профиля скорости, увеличивается с ростом разницы псевдопластичных свойств.

### Summary

*B. A. Snigerev. Double Layer of Polymer Melts in Channels of Dies*

Numerical simulation of double-layer nonlinear viscous flow in channels of dies was performed. The fluid motion is described by equations conservation of mass and momentum, supplemented by the rheological equation of state of nonlinear viscous fluid on the Carreau model. The technique of numerical solve the problem based on the finite element method is described. Results the field of velocities, pressure, stresses, position the interface boundary of two-layer flow depending on rheological properties of liquid and flow regimes are presented.

**Key words:** (non-newtonian fluid, interface boundary, twolayer flow)

#### Литература

1. *Кравченко И. В., Султанов В. Г., Патлажан С. А.* О механизме устойчивости сдвигового течения двухслойной системы вязких жидкостей. // ДАН. – 2011. – Т. 440. – С. 198–200.
2. *Yih C. S.* Instability due to viscosity stratification // J. Fluid Mech. – 1967. – V. 27, No 1. – P. 337–352.
3. *Янков В. И., Глот И. О., Труфанова Н. М., Шакиров Н. В.* Течение полимеров в отверстиях фильер. Теория, расчет, практика.. – М.: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. – 368 с.
4. *Хан Ч. Д.* Реология в процессах переработки полимеров. – М.: Химия, 1979. – 366 с.
5. *Володин В. П.* Экструзия профильных изделий из термопластов. – СПб.: Профессия, 2005. – 408 с.
6. *Коннор Дж., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.

---

**Снигеров Борис Александрович** – доктор технических наук, в.н.с., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук (ИММ КазНЦ РАН), г.Казань, Россия

E-mail: *snigerev@mail.knc.ru*